

Discretización de la red para el análisis del flujo transitorio

Network Discretization for Transient Flow Analysis

Twyman, J.

Twyman Ingenieros Consultores, Dirección: Pasaje Dos No. 362, Rancagua, Región de O'Higgins, Chile.
E-mail: john@twyman.cl

Recibido: 04/12/2018

Aceptado: 25/02/2019

Publicado: 31/07/2019

Citar como: Twyman, J. (2019). Network Discretization for Transient Flow Analysis. *Ingeniería del agua*, 23(3), 157-167. <https://doi.org/10.4995/la.2019.11093>

RESUMEN

Al aplicar el método de las características en el análisis transitorio se debe discretizar la red de tuberías de forma tal que se evite la aparición de errores debido al incumplimiento de Courant, lo cual puede ser difícil de conseguir ya que los sistemas generalmente están compuestos por tuberías diversas en cuanto a sus características físicas (longitud, material constituyente, etc.). Para solucionar esto existen técnicas como el *método de ajuste de la velocidad de la onda* (MAVO) que, pese a ser un método fácil de aplicar, debe cumplir con varias condiciones difíciles de verificar, aún en sistemas muy simples. Al analizar un sistema más complejo se concluye que el expediente de eliminar los tramos conflictivos o reemplazarlos por tuberías ficticias permite obtener una solución cercana a la exacta sin necesidad de aplicar el MAVO, en tiempos de ejecución bajos y sin afectar en forma sensible la calidad de los resultados.

Palabras clave | elemento de reemplazo de tuberías; método de ajuste de la velocidad de la onda; método de las características; número de Courant; velocidad de la onda.

ABSTRACT

When applying the method of characteristics in the transient analysis, the pipe network should be discretized in such a way as to avoid the appearance of errors due to the non-compliance of the Courant condition, which can be difficult to achieve since the systems are generally composed by pipes which are diverse in terms of their physical characteristics (length, constituent material, etc.). To solve this there are techniques such as the method of the wave speed adjustment (MWSA) which, despite being an easy method to apply, must comply with several conditions difficult to verify, even in very simple systems. When analyzing a more complex system, it is concluded that the process of eliminating the conflicting pipes or replacing them with fictitious pipes allows obtaining a solution close to the exact one without the need to apply the MWSA, this at low execution times and without affecting noticeably the results quality.

Key words | Courant number, method of characteristics, method of wave speed adjustment, pipe replacement element; wave speed.

INTRODUCCIÓN

Durante muchos años el método de las características (MC) ha sido utilizado para resolver el flujo transitorio en redes de tuberías debido a su eficiencia numérica, precisión computacional y simplicidad de programación (Twyman, 2016a). Sin embargo, una dificultad que surge es la selección del paso de tiempo (Δt) apropiado para el análisis. El reto de seleccionar un paso de tiempo adecuado se torna difícil en las redes de tuberías porque para calcular la presión y el caudal para las condiciones de borde es necesario que el paso del tiempo sea común a todas las tuberías. Además, el MC requiere necesariamente que en cada tubería se cumpla que la relación entre Δx (= longitud del subtramo) y Δt sea igual a la velocidad de la onda (a); o lo que es lo mismo, que el número Courant $C_n = (a \cdot \Delta t / \Delta x)$ sea igual a uno. Esta problemática ha sido abordada desde ya hace bastante tiempo, siendo los primeros aportes provenientes del trabajo de Evangelisti (1969). Para la mayoría de los sistemas es imposible satisfacer exactamente el requisito de Courant con un Δt razonable (y común) porque estos generalmente tienen una variedad de tuberías, todas diferentes y con una amplia gama de velocidades de ondas y longitudes (Karney y Ghidaoui, 1997). Una estrategia que permite lidiar con este problema es la aplicación del *método de ajuste de la velocidad de la onda* (MAVO), donde la idea es modificar el valor de a hasta satisfacer exactamente la condición de Courant. El objetivo del presente artículo es abordar un aspecto poco estudiado en la literatura del golpe de ariete que se refiere a la forma de discretización de la red de tuberías, cuya aplicación e impacto en los resultados debiera ser estudiado con cierto conocimiento y atención. Las ecuaciones que rigen el flujo transitorio así como la ecuación que permite calcular la velocidad de la onda en sistemas de tuberías que transportan agua sin aire pueden ser estudiadas en detalle en los textos clásicos de Wylie y Streeter (1978) y Chaudhry (1979), y también en los trabajos de Chaudhry y Hussaini (1985), Nerella y Rathnam (2015), Bergant et al. (2008), Iliev et al. (2013) y Twyman (2016b). Un método de discretización de la red basado en una malla fija y rectangular es mostrado en detalle en Twyman (2017b), y el método de reemplazo de tuberías cortas mediante elementos ficticios basados en diferencias finitas (PREs o *pipe replacement elements*) es mostrado en detalle en Twyman (2017b, 2018a), razón por la cual se omitirá entregar mayores detalles aquí.

MATERIAL Y MÉTODOS

Métodos de solución existentes

Twyman (2017a,b) presenta un compendio de los principales algoritmos de solución y programas de golpe de ariete actualmente disponibles en el mercado, donde destacan algoritmos basados en el método de las características (MC), métodos de diferencias finitas MDFs (explícitos o implícitos), método de elementos finitos (MEF), método de la onda (MO) y métodos híbridos o multidireccionales (MH), los cuales serán descritos brevemente a continuación.

Método de las características (MC)

El MC es un esquema numérico de tipo Euleriano (Wood et al., 2005) muy usado para resolver las ecuaciones que gobiernan el flujo transitorio porque trabaja con a constante y puede modelar fácilmente frentes de onda generados por flujos transitorios muy rápidos. El MC trabaja la conversión de la rejilla computacional espacio (x) - tiempo (t) según la condición de Courant. Es útil para modelar los fenómenos de propagación de ondas debido a su facilidad para introducir el comportamiento hidráulico de diferentes dispositivos y condiciones de borde (válvulas, bombas, estanques, etc.). Es fácil de usar, rápido y explícito, lo que permite calcular las variables Q y H directamente a partir de valores previamente conocidos (Chaudhry, 1979; Medhi Das et al., 2017; Wylie y Streeter, 1978). Sin embargo, en orden a obtener un resultado numéricamente exacto debe cumplir con la condición de Courant, lo que puede limitar la magnitud del Δt común para toda la red. Para obtener $C_n = 1.0$ se pueden modificar algunas propiedades iniciales de la tubería (longitud y/o velocidad de la onda). Otro camino es mantener las condiciones iniciales y aplicar interpolaciones numéricas con el riesgo de generar errores de disipación y dispersión numérica en la solución (Goldberg y Wylie, 1983).

Métodos de diferencias finitas (MDF)

En los MDFs los diferenciales de las ecuaciones básicas se aproximan por diferencias finitas, transformando el problema en la solución de ecuaciones algebraicas desacopladas (métodos explícitos) o en la solución de un sistema de ecuaciones no-lineales simultáneas (métodos implícitos). A diferencia del MC, los MDFs involucran una aproximación de las ecuaciones diferenciales parciales y, por lo tanto, implican la aparición de errores de discretización y problemas de estabilidad numérica. Los MDFs de tipo explícito están ampliamente documentados en Chaudhry (1979, 1985, 2014), siendo su principal limitación la restricción a la magnitud de Δt para satisfacer la condición de Courant (como en el MC). Aún cumpliendo con la condición de estabilidad, el método no es satisfactorio, especialmente en la modelación de transientes muy rápidos (Chaudhry, 1979). La principal ventaja del MDF explícito es que para alcanzar la solución no requiere formar y solucionar sistemas de ecuaciones. Los MDFs implícitos (como el método de Preissmann MDFI y otros) son incondicionalmente estables, permitiendo, al menos en teoría, el uso de incrementos temporales mayores que los exigidos en los métodos explícitos, pudiendo trabajar con mallas espacio-tiempo relativamente gruesas, es decir, con Δt y Δx de mayor tamaño (Wang et al., 2018). Sin embargo, en el MDFI la necesidad de aproximar los diferenciales por diferencias finitas limita el tamaño de los incrementos de tiempo a valores comparables con los requeridos en los métodos explícitos (Chaudhry, 1979). Además, la necesidad de resolver los grandes sistemas de ecuaciones simultáneas que se generan, del orden de $2xNS$, donde NS es el número total de subtramos del problema ya discretizado, ha limitado su uso. A pesar de sus características intrínsecas de estabilidad, los métodos implícitos no están exentos de dispersión y atenuación numérica. Chaudhry (1979) documenta los problemas que se presentan con este método en un sistema extremadamente sencillo.

Método de elementos finitos (MEF)

El espacio continuo es discretizado y estudiado solo en algunos puntos (vértices de la malla de elementos finitos). Las funciones a integrar son aproximadas por funciones más simples (lineales, por ejemplo). Básicamente consiste en un método de integración de ecuaciones diferenciales parciales y, como tal, puede ser usado en el estudio del flujo impermanente (Salgado, 1992). La aplicación del MEF al flujo impermanente en tuberías y canales ha sido conocida desde largo tiempo, aún cuando algunos autores (Watt et al., 1980) han demostrado que el alto costo computacional del MEF, especialmente en problemas unidimensionales como el que nos ocupa, lo torna poco competitivo en relación a otros métodos numéricos.

Método de la onda (MO)

El MO ha demostrado ser tan preciso como el MC, aunque más rápido y computacionalmente más eficiente para resolver redes de tuberías grandes compuestas por varios miles de nodos y tuberías. Esto se debe a que resuelve las variables de estado (Q y H) solo en los nodos de contorno de las tuberías, sin necesidad de discretizar la red utilizando un valor Δx para cada tramo (Wood 2005; Wood et al., 2005; Huang et al., 2018), lo cual reduce significativamente la cantidad de cálculos a realizar en cada Δt . A pesar de esto, el MO tiene varias desventajas, destacando principalmente: (1) no puede realizar cálculos relacionados con las cavidades de vapor, con las demandas de agua o con la fricción, fenómenos que tienen una forma distribuida a lo largo de las tuberías (Ebacher et al., 2011), (2) el paso de tiempo debe ser lo suficientemente pequeño para poder representar fielmente las funciones que modelan las perturbaciones en las presiones, caudales y ondas de presión, y (3) el MO no puede trabajar con tuberías excesivamente cortas, por lo que los desarrolladores de método recomiendan directamente eliminar dichas tuberías del sistema, ya que tendrían poco efecto en el análisis del estado permanente y solo agregarían complicaciones innecesarias al análisis transitorio.

Métodos híbridos o multidireccionales (MH)

Combinan dos de algunos de los métodos anteriores para producir algoritmos que, en lo posible, conserven las ventajas y reduzcan las desventajas que puedan tener cada uno de ellos utilizados por separado. Por ejemplo, en el contexto del MDF explícito basado en el esquema difusivo, para suplir la carencia de una ecuación en las secciones de borde (aparte de la condición de borde misma), se recurre al MC para proveer la ecuación faltante (Chaudhry, 1979). Karney (1984), en el contexto del MC con intervalos pre-fijados, utiliza el PRE para eliminar los tubos cortos de una red compleja, incrementando así el paso de tiempo y reduciendo la

carga computacional. Twyman (2017a) presenta en detalle una serie de métodos híbridos basados en combinaciones entre el MC, el esquema de Preissmann, el método de McCormack y el esquema difusivo. La conclusión general es que existe una variada oferta de esquemas numéricos válidos para modelar el flujo transitorio, cada uno de ellos con un distinto nivel de uso de los recursos computacionales (memoria, velocidad de procesamiento) y, lo más importante, con distinto nivel de respuesta frente al impacto de C_n , es decir, con mayor o menor susceptibilidad frente al efecto de atenuación numérica asociada a un $C_n < 1$, siendo relevante conocer las ventajas, desventajas y limitaciones numéricas de cada esquema numérico en orden a utilizar herramientas que permitan modelar en forma más precisa, rápida y eficiente los transitorios.

Tratamiento de las tuberías excesivamente cortas

Las tuberías excesivamente cortas a menudo pueden considerarse como elementos inelásticos que contienen un fluido incompresible. Con ambos supuestos se puede inferir que su elasticidad no es tan importante como su inercia. Entonces, la masa líquida puede ser tratada como un sólido y la ecuación de movimiento, con todas las fuerzas que actúan, incluida la fricción, puede ser utilizada para describir su comportamiento inestable (Wylie y Streeter, 1978). Este tipo de tuberías pueden ser consideradas como problemáticas debido a que el cálculo de Δt se basa en su longitud, haciendo que la simulación del transitorio se torne antieconómica desde el punto de vista computacional. Autores como Almeida y Koelle (1992) asignan una celeridad nula ($a=0$) a los tramos poco significativos (de escasa longitud), lo que equivale a igualar velocidades y alturas piezométricas en esos nudos contiguos, pues $\Delta x = a \cdot \Delta t$. Aunque físicamente esto no tiene sentido, porque cuando menor es la celeridad más elástico es el sistema, es una estrategia que permite ignorar tramos de escasa longitud que obligarían a reducir en forma significativa el Δt considerado. Otros autores como Karney (1984) y Karney y McInnis (1992) proponen reemplazar los tubos cortos por expresiones matemáticas (PREs) que permitirían obtener un Δt mayor sin modificar la estabilidad óptima del MC ni su condición de convergencia. La tubería corta puede ser representada a través del concepto de elemento de inercia concentrada, o alternativamente, mediante el uso de diferencias finitas, donde en ambos casos es posible acceder a mayores pasos de tiempo, siendo el enfoque basado en diferencias finitas el que muestra un mejor desempeño dada su facilidad de implementación y mejor desempeño numérico (Twyman, 2018a).

Método de ajuste de la velocidad de la onda (MAVO)

En las redes de tuberías discretizadas usando una malla espacio-temporal fija y rectangular debe ser igual para todas las tuberías, lo cual implica que la selección de su valor debe hacerse en forma cuidadosa. Se comprende rápidamente que la ecuación (1) probablemente no puede ser cumplida exactamente en la mayoría de los sistemas. El hecho de que la velocidad de la onda pueda ser conocida aunque sin gran precisión (Kela y Vähäoja, 2009), abre el espacio para ajustarla ligeramente. En forma de ecuación esto puede expresarse como (Wylie y Streeter, 1978):

$$\Delta t = \frac{L_j}{a_j(1 \pm \psi_j)N_j} \quad (1)$$

Donde L_j =longitud de la tubería j (m), a_j =velocidad de la onda de la tubería j (m/s), ψ_j =variación permitida en la velocidad de onda en la tubería j , siempre menor que un límite máximo de, por ejemplo, 0.15 (o 15%), y N_j =cantidad de subtramos asignada a la tubería j (adimensional). Generalmente se puede satisfacer la ecuación (1) tomando en cuenta a la tubería más corta del sistema, siendo preferible una ligera modificación de a que cualquier alteración en la longitud de la tubería para satisfacer el requisito de un tamaño común de Δt . A primera vista, el MAVO aparece más simple porque genera una nula disipación y dispersión, y, en teoría, sólo consiste en modificar el valor de la velocidad de la onda en un cierto porcentaje hasta cumplir con $C_n=1.0$. Sin embargo, este procedimiento puede distorsionar las características físicas del problema (Ghidaoui y Karney, 1994). En otras palabras, el cambio de a implica alterar, en términos físicos, el valor de uno o más de los parámetros que forman parte de su formulación, como la densidad del fluido o el módulo de elasticidad del elemento constitutivo de la tubería. Es decir, la modificación de a en términos numéricos implica alterar las condiciones físicas iniciales del sistema, llevando a una solución que puede ser correcta en términos numéricos (para cumplir con C_n), pero incorrecta en términos físicos porque se resuelve el problema utilizando parámetros con magnitudes irreales (Twyman, 2016b).

RESULTADOS

Ejemplo 1

Se mostrará un ejemplo muy sencillo donde el MAVO deja de funcionar. La Figura 1 muestra el diagrama del sistema que consiste de un depósito ubicado aguas arriba con $H_0=100$ (m), una tubería metálica ($L=4800$ m, caudal $Q_0=2.632$ m³/s, diámetro $D=2$ m, $a=1200$ m/s y factor de fricción $f=0.022$) y una válvula ubicada aguas abajo con un tiempo de cierre $T_c=35$ (s). El flujo de estado permanente se resolvió usando el software EPANET (Rossman, 1993). El flujo transitorio fue resuelto aplicando el MC. En este caso, la tubería fue discretizada usando $N=10$ y $\Delta t=0.2$ (s). Con estos valores se obtiene $C_n=a\Delta t/(L/N)=0.5$. El tiempo máximo de simulación es $T_{m\acute{a}x}=60$ (s).

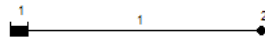


Figura 1 | Esquema de la red ejemplo 1 (captura de pantalla de EPANET, sin escala).

Para obtener $C_n=1.0$ aplicando la técnica del MAVO, la magnitud de a debe incrementarse en un 100% hasta llegar al valor 2400 (m/s), es decir, $a=L/N\Delta t=4800/(10\cdot 0.2)$, situación imposible porque el valor máximo teórico de a en tuberías metálicas es aproximadamente igual a 1440 (m/s). La Figura 2 muestra las envolventes de presión máximas y mínimas para este caso, donde la solución con $a=2400$ m/s (línea punteada) genera errores significativos en comparación con la solución exacta (MC con $C_n=1.0$, línea continua).

Ejemplo 2

La red a analizar (Figura 3) se compone de un depósito ($H_0=70$ m), 22 tuberías con distintas longitudes, 18 nodos y una válvula que cierra en $T_c=10$ (s). Todos los nodos tienen una elevación igual a 0 (m). Las Tablas 1 y 2 muestran los datos de las tuberías y los nodos, respectivamente. El estado inicial de flujo permanente fue calculado usando el programa EPANET (Rossman, 1993). El factor de fricción (f Darcy) es constante al igual que el valor de la velocidad de la onda. En este ejemplo destaca el tramo 6 con una longitud relativa excesivamente corta de tan sólo 10 (m).

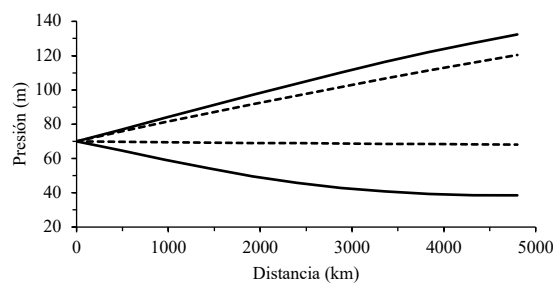


Figura 2 | Envolventes de presiones (red ejemplo 1).

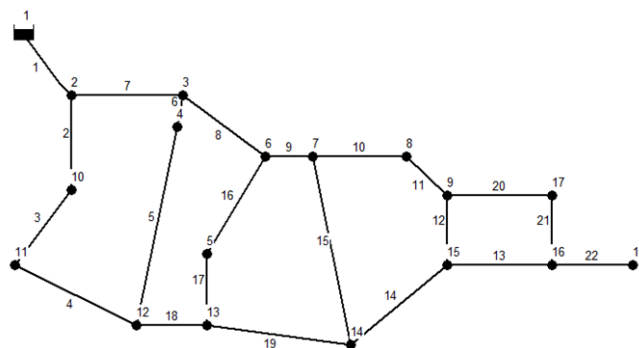


Figura 3 | Esquema de la red ejemplo 2 (captura pantalla de EPANET, sin escala).

Caso 1. Solución mediante el MC

Se resuelve la red aplicando el MC. La red queda discretizada con $\Delta t=0.011$ (s) y N total=291. El tramo más corto (el 6) tiene asignado $N=1$. La Figura 4 muestra la curva de presión en función del tiempo en el nodo donde se ubica la válvula y los C_n de los tramos. El resultado obtenido es comparado con la solución exacta (donde $C_n=1.0$ en todas las tuberías, $\Delta t=0.011$ s y N total=299). El tiempo máximo de simulación es $T_{m\acute{a}x}=30$ (s).

Caso 2. Solución mediante el MC y eliminando el tramo 6

Se resuelve la red aplicando el MC y eliminando el tramo 6 (excesivamente corto) del análisis. La red queda discretizada con $\Delta t=0.033$ (s) y N total=85. La Figura 5 muestra la curva de presión en función del tiempo en el nodo donde se ubica la válvula y los C_n de los tramos. El resultado obtenido es comparado con la solución exacta.

Caso 3. Solución mediante el MC y un elemento de reemplazo de tubería

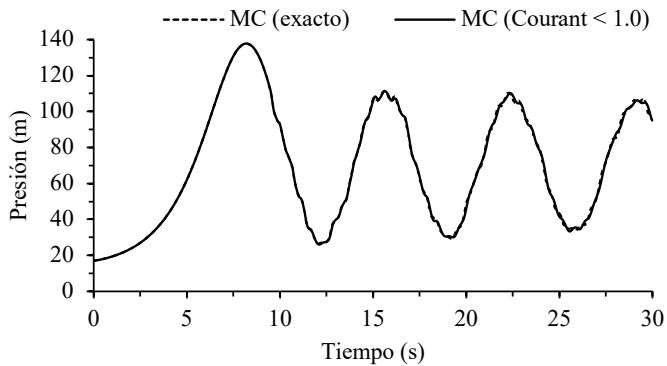
Se resuelve la red aplicando el MC y reemplazando el tramo 6 por un PRE formulado en diferencias finitas.

Tabla 1 | Datos de las tuberías (red ejemplo 2).

Tubería número	D (m)	L (m)	Q_0 (m ³ /s)	f (Darcy)	a (m/s)
[1]	0.20	300	0.060	0.018	1005,0
[2]	0.15	120	0.016	0.020	1143,0
[3]	0.15	110	0.016	0.020	1219,2
[4]	0.15	300	0.016	0.020	914,4
[5]	0.20	300	0.015	0.021	1143,0
[6]	0.20	10	0.015	0.021	900,0
[7]	0.20	300	0.044	0.018	920,0
[8]	0.20	270	0.028	0.019	914,4
[9]	0.20	30	0.041	0.019	1010,8
[10]	0.15	150	0.029	0.020	1020,8
[11]	0.15	100	0.029	0.020	900,8
[12]	0.15	50	0.002	0.028	855,8
[13]	0.11	90	0.033	0.020	1005,8
[14]	0.15	160	0.031	0.019	1015,0
[15]	0.15	310	0.013	0.021	1025,9
[16]	0.20	100	0.013	0.021	1200,8
[17]	0.20	100	0.013	0.021	1100,8
[18]	0.20	100	0.032	0.019	900,0
[19]	0.15	200	0.019	0.020	945,8
[20]	0.11	90	0.027	0.020	930,0
[21]	0.11	50	0.027	0.020	1000,0
[22]	0.11	80	0.060	0.020	1015,0

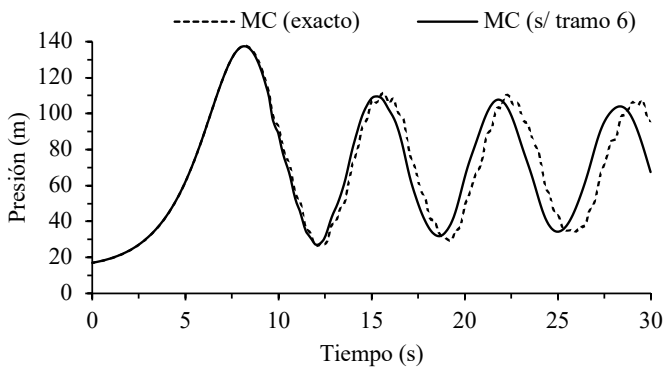
Tabla 2 | Datos de los nodos (red ejemplo 2).

Nodo número	H_0 (m)	Nodo número	H_0 (m)
1	70.00	10	64.26
2	64.96	11	63.61
3	62.23	12	61.84
4	62.22	13	61.35
5	61.26	14	59.81
6	61.17	15	56.62
7	60.92	16	46.16
8	58.29	17	49.87
9	56.53	18	16.96



Tramo	Courant	Tramo	Courant
1	0.97	12	0.95
2	0.95	13	1.00
3	0.99	14	0.99
4	0.98	15	0.99
5	0.97	16	0.93
6	1.00	17	0.98
7	0.99	18	0.90
8	0.98	19	1.00
9	0.75	20	0.92
10	0.98	21	0.89
11	0.90	22	0.99

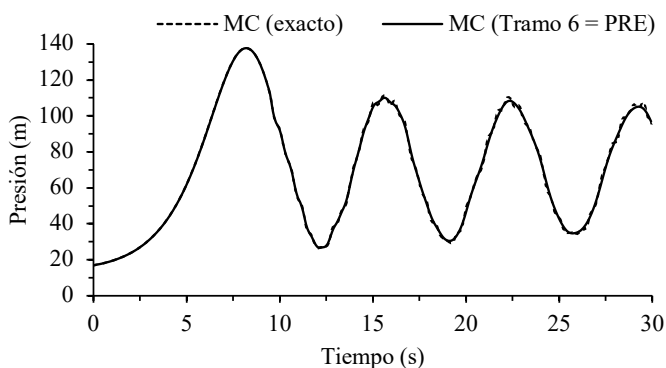
Figura 4 | Presión en función del tiempo en la válvula (caso 1). En la tabla del lado derecho se muestra el C_n de cada tramo.



Tramo	Courant	Tramo	Courant
1	0.99	12	0.94
2	0.94	13	0.83
3	0.73	14	0.97
4	1.00	15	0.67
5	0.75	16	0.79
6	0.98	17	0.72
7	0.89	18	0.89
8	1.00	19	0.69
9	0.88	20	0.61
10	0.67	21	0.82
11	0.59	---	---

Figura 5 | Presión en función del tiempo en la válvula (caso 2). En la tabla del lado derecho se muestra el C_n de cada tramo.

En este caso la red queda discretizada con $\Delta t=0.030$ (s) y N total=103. La Figura 6 muestra la curva de presión en función del tiempo en el nodo donde se ubica la válvula y los C_n de los tramos. La Tabla 3 muestra una comparación de los resultados entregados por los 3 casos antes descritos, más el caso 0 (MC exacto). A diferencia del concepto de PRE planteado por Karney y McInnis (1992), donde se trabaja los tramos excesivamente cortos con una expresión matemática algebraica denominada elemento de inercia concentrada (o lumped inertia element, en Inglés), en este artículo se aplica una aproximación original para el PRE basada en el método de diferencias finitas, el cual, al ser aplicado en las ecuaciones que rigen el comportamiento transitorio de un tramo muy corto, genera expresiones 100% explícitas para el cálculo de Q y H , fáciles de implementar y resolver (más detalles en Twyman, 2018a).



Tramo	Courant	Tramo	Courant
1	0.99	12	0.51
2	0.85	13	1.00
3	0.99	14	0.94
4	0.99	15	0.98
5	0.90	16	0.71
6	2.67	17	0.98
7	0.91	18	0.80
8	0.90	19	0.98
9	1.00	20	0.92
10	0.81	21	0.59
11	0.80	22	0.76

Figura 6 | Presión en función del tiempo en la válvula (caso 3). En la tabla del lado derecho se muestra el C_n de cada tramo.

Tabla 3 | Resultados obtenidos según el MC ($N=1$ para el tramo más corto). El caso No. 2 aparece con tramo 21 porque el tramo 6 fue eliminado, lo cual afectó la numeración de la red.

Caso No.	Método	$P_{m\acute{a}x}$ (m)	Tramo	$P_{m\acute{i}n}$ (m)	Tramo	Tiempo de ejecución (s)
0	MC (exacto)	137.7	22 (válvula)	16.9	22 (válvula)	2530
1	MC ($C_n < 1.0$)	137.8	22 (válvula)	16.9	22 (válvula)	2471
2	MC (s/ tramo 6)	137.4	21 (válvula)	17.1	21 (válvula)	314
3	MC (c/ PRE tramo 6)	137.7	22 (válvula)	16.9	22 (válvula)	412

Variación del valor de a

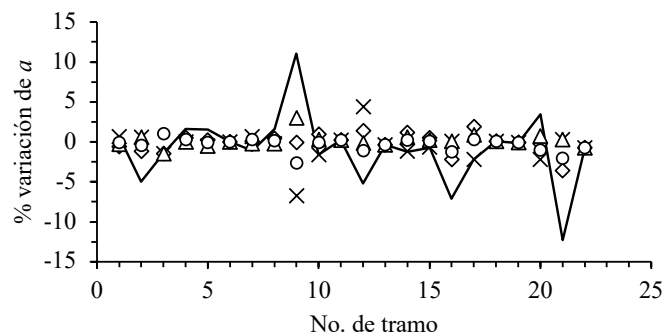
En estricto rigor lo que busca el MAVO es modificar los valores originales de a dentro de un rango máximo recomendado de $\pm 15\%$ en orden a conseguir que todos los tramos queden con $C_n = 1.0$. Es decir, se busca conseguir una discretización de la red tal que asegure un resultado numéricamente exacto. La Tabla 4 muestra cómo queda la discretización de la red al considerar distintos valores de N para el tramo más corto. Se puede apreciar en este caso que no tiene mucho sentido aumentar el valor de N por sobre 1 porque aparte de variar N total (al doble cuando $N=2$ o al quintuple cuando $N=5$ en el tramo más corto) y disminuir el valor de Δt (a la mitad cuando $N=2$ o a la quinta parte cuando $N=5$ en el tramo más corto), con todas las implicancias de esto en cuanto al uso de memoria computacional y tiempo de ejecución, sólo en las tuberías 9 y 21 se presentan variaciones de a relativamente significativas (ver Figura 7). Es decir, la aplicación del MAVO tomando en cuenta un N mayor que 1 para el tramo más corto sólo implica caer en soluciones ineficientes desde el punto de vista computacional, más aún tomando en cuenta los resultados mostrados en las Figuras 4, 5 y 6.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el primer ejemplo analizado se deja claro que la técnica del MAVO no es una panacea y puede fallar aún en casos de sistemas extremadamente simples como el mostrado en la Figura 1.

Tabla 4 | Resultados obtenidos según distintas discretizaciones. En todos los casos se obtiene $C_n = 1.0$ para todos los tramos.

N (tramo más corto)	N total	Paso de tiempo Δt (s)	Δx promedio (m)	Observaciones
1	299	0.01110504	11.3	Sólo tramos 9 y 21 con porcentaje de variación de $a > \pm 10\%$.
2	598	0.00555252	5.6	Sólo tramo 9 con porcentaje de variación de $a > 5\%$.
3	900	0.00370168	3.7	Sólo tramo 21 con porcentaje de variación de $a > 3\%$.
4	1199	0.00277626	2.8	Sólo tramo 9 con porcentaje de variación de $a > 2.5\%$.
5	1498	0.00222101	2.2	Sólo tramo 9 con porcentaje de variación de $a > 2.5\%$.

**Figura 7** | Variación de a (%) en cada tramo según el valor de N adoptado para el tramo más corto de la red. — $N=1$, \times $N=2$, \diamond $N=3$, \triangle $N=4$, \circ $N=5$.

En este caso se demuestra que, al parecer, el MAVO deja de funcionar en tramos donde el C_n es relativamente bajo (por ejemplo, igual a 0.5), constituyéndose en una técnica inviable, por lo que el problema debiera ser resuelto usando otros esquemas numéricos que sean inmunes a C_n , es decir, que no requieran modificar algún valor inicial como velocidades de ondas o longitudes en orden a funcionar eficientemente, y que puedan funcionar con un razonable nivel de precisión y estabilidad sin necesidad de tener que cumplir perentoriamente con la relación $a \cdot \Delta t = \Delta x$ en el tramo. Algunos de estos métodos fueron mencionados en el apartado *material y métodos* de este artículo. El MAVO distorsiona las características físicas del problema, por lo que es recomendable que, en el proceso de discretización del sistema, el analista verifique si los valores finales adoptados para calcular a son consistentes y apropiados, tanto en términos numéricos como físicos, porque de lo contrario se estaría resolviendo un problema muy diferente originalmente planteado, con implicaciones para todas las etapas de diseño o verificación de los sistemas. Antes de cambiar el valor de a es importante comprobar los efectos que subyacen detrás de su cambio de magnitud. En este punto es importante conocer qué parámetros de su formulación son conocidos y se pueden considerar inalterables (diámetro o grosor de la tubería, material constituyente) y comprobar cuáles de los demás parámetros pueden ser modificados analizando su rango de variación y/o nivel de realidad.

En la segunda red analizada, al revisar las curvas de presión en función del tiempo en la válvula para los diferentes casos, se demuestra que, al contrario de lo que se pudiera pensar, el efecto de C_n con valores distintos de 1.0 en varias tuberías del sistema genera un efecto casi imperceptible en los resultados, lo cual podría significar que no siempre es perentorio cumplir con la condición de Courant para obtener un resultado satisfactorio, sin que esto pueda ser ampliable a otras redes ya que todas difieren en cuanto a su forma y características físicas, por lo que cada caso debe ser analizado por separado. Tanto la eliminación del tramo conflictivo (tramo 6) como su reemplazo por un PRE, condujo a soluciones adecuadas respecto de la solución exacta dada por el MC, esto considerando los valores de presiones máximas y mínimas (Tabla 3), aunque la solución obtenida sin el tramo 6 muestra un cierto desfase en la curva de presión (Figura 5), lo cual es esperable porque se modifica el tiempo característico L/a del sistema, es decir, la eliminación del tramo 6 hace que las ondas de presión recorran una distancia relativamente menor, haciendo que la curva en función de la presión muestre un corrimiento.

Lo que marca la diferencia en este caso son los tiempos de ejecución del programa de golpe de ariete. La solución mediante el MC aplicando el MAVO en orden a obtener $C_n = 1.0$ para todas las tuberías, considerando la red original sin la eliminación de la tubería corta ni la incorporación del PRE (caso 0, Tabla 3), significó un tiempo de ejecución de 42 minutos, esto debido a que es el tramo 6 es que condiciona el tamaño de Δt . La aplicación del MC considerando los números de Courant que resultan de sólo aplicar el proceso de discretización usual (caso 1) significó un tiempo de ejecución de 41 minutos. La opción de dejar fuera del análisis el tramo 6 (caso 2) permitió llegar a una solución aceptable en 5 minutos, permitiendo que el paso de tiempo fuera calculado usando el siguiente tramo de mayor longitud (tramo 9 con $L = 30$ m). Por otro lado, la alternativa de reemplazar el tramo 6 por un PRE (caso 3) significó alcanzar una solución igual a la exacta con una inversión de tiempo computacional de 6 minutos, tiempo que se justifica toda vez que el programa de golpe de ariete tuvo que invertir tiempo en resolver el PRE en cada Δt . En este caso el programa consideró en su discretización y cálculo de Δt el tramo 9 ($L = 30$ m), el siguiente en longitud. Todos los ejemplos fueron corridos en un PC de 64 bits con velocidad de procesamiento de 1.40 (GHz).

En el ejemplo analizado, la opción de eliminar el tramo 6 significó re-hacer la red re-numerando los tramos y asignando nuevos valores de caudal en los tramos y de presión en los nodos (dados por EPANET) en el archivo de entrada de datos del programa de golpe de ariete, lo cual puede constituir una tarea un tanto demorosa y engorrosa que debe hacerse con mucha precaución en caso de no disponer de un programa computacional que disponga de subrutinas que hagan esto en forma automática. El reemplazo de la tubería corta por un PRE (diferencias finitas) hizo innecesario hacer cambios en la red, sólo hubo que indicar en el archivo de entrada de datos cuál tramo tenía que ser reemplazado por una tubería ficticia, lo cual constituye una ventaja evidente debido a que esto evitó tener que re-ajustar manualmente la red. Fue necesario asignar $N = 1$ al tramo más corto del sistema ya que cualquier valor mayor hubiera significado un incremento significativo en la cantidad total de subtramos y una reducción apreciable del paso de tiempo (Tabla 4), con el consiguiente impacto probable en la memoria computacional y tiempo de ejecución. Como se explicó anteriormente, la adopción de $N = 1$ tuvo un impacto poco significativo en los números de Courant, con lo cual en este caso no fue indispensable aplicar el MAVO en orden a obtener un mejor resultado. Como conclusión se tiene que, en la red analizada con una tubería excesivamente corta, el resultado más satisfactorio se obtiene reemplazando dicha tubería por un PRE (diferencias

finitas), debido principalmente al nivel de exactitud de las presiones extremas, coincidencia con la curva presión vs. tiempo exacta, facilidad de implementación y buen tiempo de ejecución.

REFERENCIAS

- Almeida, A.B., Koelle, E. 1992. *Fluid Transients in Pipe Networks*. Computational Mechanics Publications. London, New York, Elsevier Applied Science.
- Bergant, A., Tijsseling, A.S., Vítkovský, J.P., Covas, D.I.C., Simpson, A.R., Lambert, M.F. 2008. Parameters Affecting Water-Hammer Wave Attenuation, Shape and Timing - Part 1: Mathematical Tools. *Journal of Hydraulic Research*, 46(3), 373-381. <https://doi.org/10.3826/jhr.2008.2848>
- Chaudhry, M.H. 1979. *Applied Hydraulic Transients*, Van Nostrand Reinhold, USA.
- Chaudhry, M.H. 2014. *Applied Hydraulic Transients*. Tercera Edición. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8538-4>
- Chaudhry, M.H., Hussaini, M.Y. 1985. Second-Order Accurate Explicit Finite-Difference Schemes for Waterhammer Analysis. *Journal of Fluids Engineering*, 107, 523-528. <https://doi.org/10.1115/1.3242524>
- Ebacher, G., Besner, M.-C., Lavoie, J., Jung, B.S., Karney, B.W., Prévost, M. 2011. Transient Modeling of a Full-Scale Distribution System: Comparison with Field Data. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 137(2), 173-182. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)WR.1943-5452.0000109](https://doi.org/10.1061/(ASCE)WR.1943-5452.0000109)
- Evangelisti, 1969. Waterhammer Analysis by the Method of Characteristics. *L'Energia Elettrica*, 10-12, 673-692, 759-770, 839-858.
- Ghidaoui, M.S., Karney, B.W. 1994. Equivalent Differential Equations in Fixed-Grid Characteristics Method. *Journal of Hydraulic Engineering*, 120(10), 1159-1175. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1994\)120:10\(1159\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1994)120:10(1159))
- Goldberg, D.E., Wylie, E.B. 1983. Characteristics Method using Time-Line Interpolations. *Journal of Hydraulic Engineering*, 109(5), 670-683. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1983\)109:5\(670\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1983)109:5(670))
- Huang, Y., Zheng, F., Duan, H.-F., Zhang, Q., He, G. 2018. An Efficient Lagrangian-Based Approach for Transient Modelling and Analysis in Urban Water Distribution Networks. *1st International WDSA / CCWI 2018 Joint Conference*, July 23-25, Kingston, Ontario, Canada.
- Iliev, V., Popovski, P., Markov, Z. 2013. Water Hammer Analysis using Characteristics Method and Numerical Simulation. *Mechanical Engineering - Scientific Journal*, 31(1-2), 53-62.
- Karney, B.W. 1984. *Analysis of Fluid Transients in Large Distribution Networks*. PH.D. Thesis, Columbia, Canada.
- Karney, B.W., McInnis, D. 1992. Efficient Calculation of Transient Flow in Simple Pipe Networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 118(7), 1014-1030. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1992\)118:7\(1014\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1992)118:7(1014))
- Karney, B.W., Ghidaoui, M.S. 1997. Flexible Discretization Algorithm for Fixed-Grid MOC in Pipelines. *Journal of Hydraulic Engineering*, 123(11), 1004-1011. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1997\)123:11\(1004\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1997)123:11(1004))
- Kela, L., Vähöja, P. 2009. Measuring Pressure Wave Velocity in a Hydraulic System. *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, 3(1), 67-73.
- Medhi Das, B., Mohan Das, M., Sarma, B. 2017. Solution of Unsteady Flow Equations in High Pressure Pipe. *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*, 6(3), 4300-4312.
- Nerella, R., Rathnam, E.V. 2015. Fluid Transients and Wave Propagation in Pressurized Conduits due to Valve Closure. *Procedia Engineering*, 127(2015), 1158-1164. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.11.454>

- Rossman, L.A. 1993. *User's Manual for EPANET*. USEPA, Drinking Water Res. Div., Cincinnati, USA.
- Salgado, R. 1992. Revisión de los Métodos Numéricos para el Análisis del Esguimiento Impermanente en Redes de Tuberías a Presión". *XV Congreso Latinoamericano de Hidráulica*, AIHR, Colombia.
- Tijsseling, A.S., Bergant A. 2007. Meshless Computation of Water Hammer. *2nd IAHR International Meeting of the Workgroup on Cavitation and Dynamic Problems in Hydraulic Machinery and Systems*, October 24-26, Timisoara, University of Timisoara.
- Twyman, J. 2016a. Golpe de Ariete en una Red de Distribución de Agua. *Anales del XXVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica IAHR*, Spain Water and IWHR China, Septiembre 26-30, Lima, Perú, pp. 10.
- Twyman, J. 2016b. Wave Speed Calculation for Water Hammer Analysis. *Obras y Proyectos*, 20, 86-92. <https://doi.org/10.4067/S0718-28132016000200007>
- Twyman, J. 2017a. Water Hammer Analysis in a Water Distribution System. *Ingeniería del Agua*, 21(2), 87-102. <https://doi.org/10.4995/ia.2017.6389>
- Twyman, J. 2017b. Water Hammer Analysis Using a Hybrid Scheme. *Journal of Construction and Civil Engineering (RIOCI)*, 2017, 7, 16-25. Disponible en: <http://revistas.ufro.cl/ojs/index.php/rioc/article/view/1997>. Último acceso: junio de 2019.
- Twyman, J. 2018a. Water Hammer Analysis Using an Implicit Finite-Difference Method. *Ingeniare, Revista Chilena de Ingeniería*, 26(2), 307-318. <https://doi.org/10.4067/S0718-33052018000200307>
- Wang, P., Yu, B., Han, D., Li, J., Sun, D., Xiang, Y., Wang, L. 2018. Adaptive Implicit Finite Difference Method for Natural Gas Pipeline Transient Flow. *Oil & Gas Science and Technology*, 73(21), 1-12. <https://doi.org/10.2516/ogst/2018013>
- Watt, C.S., Boldy A.P., Hobbs J.M. 1980. Combination of Finite Difference and Finite Element Techniques in Hydraulic Transient Problems. Paper B2, *Third International Conference on Pressure Surges*, BHRA, U. of Kent, Canterbury, England.
- Wood, D.J. 2005. Waterhammer Analysis-Essential and Easy (and Efficient). *Journal of Environmental Engineering*, 131(8), 1123-1131. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9372\(2005\)131:8\(1123\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9372(2005)131:8(1123))
- Wood, D.J., Lingireddy, S., Boulos, P.F., Karney, B.W., McPherson, D.L. 2005. Numerical Methods for Modeling Transient Flow in Distribution Systems. *Journal of AWWA*, 97(7), 104-115. <https://doi.org/10.1002/j.1551-8833.2005.tb10936.x>
- Wylie, B.E., Streeter, V. 1978. *Fluid Transients*, McGraw-Hill International Book Company, New York, USA.